MA2 – „písemná" přednáška 8. 4. 2020

Nejdříve stručné shrnutí „povídání" z minulé přednášky o implicitně definované funkci jedné proměnné.

Formulovali jsme problém:

Je dána jedna (obecně nelineární) rovnice pro dvě neznámé $F(x,y)=0$, a známe jedno řešení $(x_0,y_0)\in R^2$ této rovnice, tedy platí $F(x_0,y_0)=0$. A co je ten problém? Zjistit, kdy bude mít tato rovnice při volbě x „blízko" hodnoty x_0 jediné řešení y (z jedné rovnice $F(x,y)=0$ asi nemůžeme určit obě neznámé, proto jednu – zde x – volíme). Pokud ke „zvolenému" x bude třeba nalézt „jediné" y, je tím vlastně „zadána funkce – a ta je nazvána funkce implicitně definovaná.

Zopakujme definici:

Nechť (1) $F(x,y)$ je definovaná na množině $G\subset R^2$, G – otevřená,
(2) existuje bod $(x_0,y_0)\in G$ tak, že $F(x_0,y_0)=0$

Pak říkáme, že rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y=y(x)$, jestliže existují $\varepsilon>0, \delta>0$ tak, že pro každé $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ je $y=y(x)$ jediné řešení rovnice $F(x,y)=0$ takové, že $y(x)\in(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$

Tedy platí: 1) $y(x_0)=y_0$
2) $F(x,y(x))=0$ pro $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

(dle minulé přednášky značíme funkci též „písmenem" y, tj. $y=y(x)$ – v souladu s aplikacemi)

A odpověď na danou otázku je (bylo uvedeno bez důkazu)

<u>Věta (o implicitní funkci)</u>

Nechť (1) $F(x,y) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^2$ je otevřená množina, $k \in N$

(2) $F(x_0,y_0) = 0$, $(x_0,y_0) \in G$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

Potom rovnicí $F(x,y)=0$ je v okolí bodu (x_0,y_0) definována implicitně funkce $y = y(x)$, $y(x) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$ a

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, \quad x \in \mathcal{U}(x_0).$$

<u>Tedy o fci $y(x)$ „víme" toto</u>: 1) $y(x_0) = y_0$

2) $F(x,y(x)) = 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$

3) $$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

<u>Poznámka</u>: vzorec pro $y'(x)$ jsme si „dokázali" (užití řetízkového pravidla) v minulé přednášce; ale „doopravdy" „číselně" určit umíme $y'(x_0)$ (neboť známe-li $F(x,y)$ a $y(x_0)=y_0$, umíme i $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ i $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$, tedy i $y'(x_0)$ (v 3) – – pro $x \neq x_0$, $x \in \mathcal{U}(x_0)$ známe „formuli" pro $y'(x)$, ale neznáme ani $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))$, ani $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))$ – – neboť „neznáme" $y(x)$.

Minule jsme si vyřešili příklad „technický" – řešení rovnice $x^3+y^3-3xy-3=0$ v okolí bodu $(x_0,y_0)=(1,2)$, ale i jeden <u>příklad „teoretický"</u> – je-li dána v rovině křivka o rovnici $F(x,y)=0$ (kde F splňuje předpoklady věty o implicitní funkci (aspoň pro $k=1$), $F(x_0,y_0)=0$ a $\nabla F(x_0,y_0)\neq(0,0)$, pak rovnice tečny k této křivce v bodě (x_0,y_0) je (docela užitečné!)

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

(též lze psát $dF(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)=0$)

Připomínám, že jsme si „křivku" nedefinovali (zatím) „přesně", ale bylo vysvětleno, že množinu $\{(x,y);\ F(x,y)=0\}$ lze si představit jako „vrstevnici" grafu funkce $F(x,y)=z$ ve „výšce" $z=0$ – za předpokladu $F\in C^{(k)}(G)$ lze věřit tomu, že tato množina je křivka, jak si ji (asi) představujeme.

<u>Příklad 1.</u> Je dána elipsa o rovnici $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0, b>0$. Pak rovnici lze zapsat: $F(x,y)=0$, kde $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, a nechť (x_0,y_0) je bodem elipsy, tedy $F(x_0,y_0)=0$; $F(x,y)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, $\nabla F(x_0,y_0)=2\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\right)\neq(0,0)$,

neboť počátek $(0,0)$ na elipse neleží!

Jsou tedy splněny v našem příkladu předpoklady věty (o implicitní funkci) a rovnice tečny k elipse v bodě (x_0,y_0) této elipsy je

$$2\,\frac{x_0}{a^2}(x-x_0) + 2\,\frac{y_0}{b^2}(y-y_0) = 0$$

a po úpravě („krátíme" 2 a využijeme, že $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$)

dostaneme rovnici ve tvaru:

$$\underline{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$ – „snadné"!

A ještě si uvedeme jeden příklad k větě o „implicitní" funkci jedné proměnné – na úvod k funkcím, definovaným implicitně, byla zmíněna rovnice, která vyjde" při řešení diferenciální rovnice 1. řádu se separovatelnými proměnnými (rovnice „pro" řešení $y(x)$ se nazývá první integrál této diferenciální rovnice) – – a zde je příklad („opačná" cesta) – máme rovnici pro řešení, a dostaneme diferenciální rovnici, jejíž řešení je rovnice daná.

<u>Příklad 2.</u> Je dána rovnice

$$(1)\qquad \underline{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = 0\ ;\quad (x_0,y_0) = (1,0)}$$

<u>Označme</u>: $F(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$;

pak:
1) $F \in C^\infty(\mathcal{U}(1,0))$
2) $F(1,0) = 0$
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}\Big|_{(1,0)} = -1$

Tedy vidíme, že jsou splněny předpoklady věty o implicitní funkci, tedy rovnicí (1) je v okolí bodu (1,0) definována implicitně funkce $y = y(x)$, tj. $y(1)=0$ a platí

(2) $\quad \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2(x) \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{y(x)}{x} \right) = 0 \quad$ v $\mathcal{U}(1)$

A použijeme-li „vzorec" pro výpočet $y'(x)$, dostaneme:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y - \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y-x}{x^2+y^2}$$

tedy: (dle „vzorce")

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \doteq -\frac{x+y(x)}{y(x)-x} \quad \text{v okolí bodu } x=1,$$

tedy, $y(x)$ je řešením diferenciální rovnice

$$y'(x) = -\frac{x+y(x)}{y(x)-x} \quad \text{s počáteční podmínkou } y(1)=0$$

Rovnici pro $y'(x)$ bychom dostali též derivací vztahu (2) dle x, – můžete si zkusit.

A nyní ještě dvě „zobecnění" (a stručněji)

1) Implicitně definovaná funkce více proměnných

Definice: Řekneme, že rovnicí $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ je v okolí bodu $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, y_0)$ definována implicitně funkce $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, když

1) $F(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0, y_0) = 0$

2) existují $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ taková, že pro každé $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(X_0, \delta)$ je $y = f(X)$ jediné řešení rovnice $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ takové, že $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U(y_0, \varepsilon)$ (zde $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$)

Pak (opět jako u rovnice $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in R^2$) platí:

1) $F(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ v $U(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

2) $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = y_0$

Poznámka: Pro jednodušší zápis budeme (opět) značit $(x_1, x_2, \dots, x_n) = X$, $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = X_0$, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(X)$; a v aplikacích se opět značí funkce, definovaná implicitně rovnicí $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ spíše $y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – budeme takto implicitně definovanou fci značit též.

Věta (o implicitní funkci více proměnných)

Nechť 1) $F(X,y) \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^{n+1}$, G – otevřená množina;

2) $F(X_0,y_0) = 0$, $(X_0,y_0) \in G$;

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(X_0,y_0) \neq 0$;

Pak rovnicí $F(X,y)=0$ je v okolí bodu (X_0,y_0) definovaná implicitně funkce $y = y(X) \in C^{(k)}(U(X_0,\delta))$ pro „jisté" $\delta > 0$.
Parciální derivace funkce $y = y(X)$ jsou v tomto okolí $U(X_0,\delta)$ dány „vzorcem" pro $i = 1,2,..n$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(X) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(X, y(X))}{\frac{\partial F}{\partial y}(X, y(X))} .$$

A „rozepsáno" pro $X = (x_1, .., x_n)$:

$$(*) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, .., x_n) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,..,x_n, y(x_1,..,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,..x_n, y(x_1,..,x_n))}$$

A odvození vzorce (*): Za předpokladu věty platí:

$$(**) \qquad F(x_1, .., x_n, y(x_1,..,x_n)) = 0 \quad v \quad U(X_0,\delta)$$

Funkce $F(x_1,..,x_n, y(x_1,..,x_n))$ má dle předpokladů věty všechny parciální derivace a k jejich odvození lze užít pravidlo pro derivování složené funkce:

Jestliže platí (**), tj.

$$F(x_1,\dots,x_n, y(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad v \ \mathcal{U}(X_0,\delta),$$

je i
$$\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad v \ \mathcal{U}(X_0,\delta)$$

a užitím řetízkového pravidla dostáváme $\left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = 0 \text{ pro } i \neq j \right)$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n)) \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = 0,$$

a tedy
$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\dots,x_n,y(x_1,\dots,x_n))},$$

neboť ze spojitosti parciálních derivací funkce F i y a nenulovosti $\frac{\partial F}{\partial y}(X,y)$ v bodě (X_0,y_0) dostaneme, že $\frac{\partial F}{\partial y}(X,y) \neq 0$ v $\mathcal{U}(X_0,\delta)$, $\delta > 0$ (a to právě je ve „větě“)

Toto byl vlastně příklad 1. na implicitně definované funkce více proměnných – takto to „berte“.

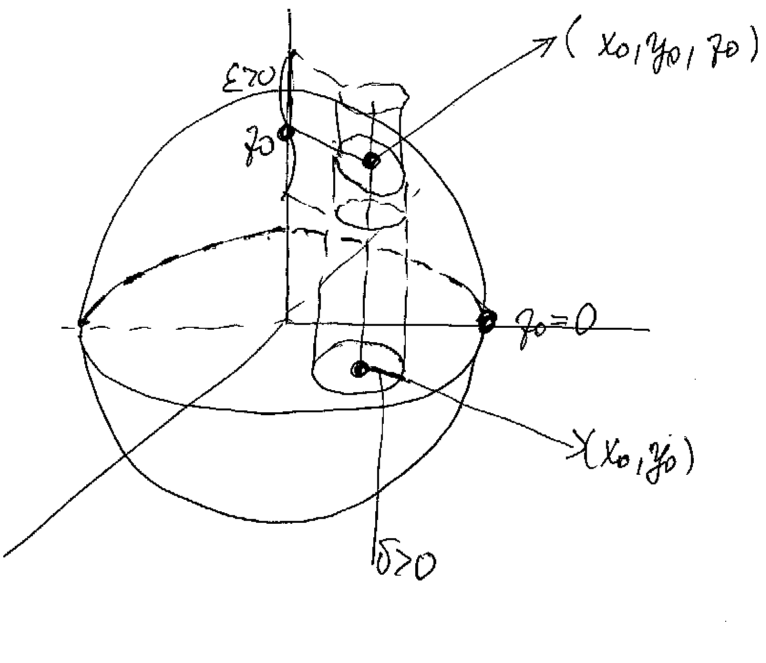
A teď „hlubší“ vysvětlení – jak vlastně „rozumět“ tvrzení uvedené věty o „implicitní“ funkci více proměnných, a hlavně předpokladu 3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1^0,\dots,x_n^0,y_0) \neq 0$:

„Vstupme“ do R^3, tj. zkusme si představit „nějaký“ jednoduchý příklad rovnice $F(x,y,z) = 0$ (v R^3 budeme bod značit zpravidla (x,y,z))

Nechť je dána rovnice $x^2+y^2+x^2=R^2$, $R>0$

Množina bodů v R^3 $\mathcal{S}=\{X=(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ R>0\}$ je povrch koule o středu v počátku 0 a poloměru $R>0$ – – říká se „kulová plocha" nebo „sféra" – neboť je $\mathcal{S}$ množina bodů, které mají od počátku 0 vzdálenost $d_3(0,X)=R$ $\left(=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$

Vezměme si bod $X_0=[x_0,y_0,z_0]\in\mathcal{S}$, $z_0>0$ (pro $z_0<0$ analogické)



v okolí bodu (x_0,y_0,z_0), $z_0>0$ lze sféru $\mathcal{S}$ vyjádřit jako graf funkce

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,,\ \text{tj. } z=f(x,y),$$

ale pokud je $z_0=0$ (tj. bod (x_0,y_0,z_0) je na „rovníku"), pak v žádném okolí bodu $(x_0,y_0,0)$ nelze sféru $\mathcal{S}$ vyjádřit pomocí grafu nějaké funkce $z=f(x,y)$ – analogické příkladu s kružnicí" u implicitně def. "fce dvou proměnných.

A všimněme si, že zde je $\left(\frac{\partial F}{\partial z}=2z\right)$ $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,0)=0$! Tedy, tečná rovina je rovnoběžná s osou z, a to je právě to, co „nesmí škodit". Jakmile je ale $z_0\neq 0$, pak už vždy „kousek sféry" je možno popsat grafem funkce – tečná rovina ke sféře v tomto bodě už je „dobrá".

Příklad 2 – opět „teoretický"

Odvození rovnice tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ $(*)$ v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy, tj. $F(x_0,y_0,z_0)=0$ – za předpokladů věty o implicitní funkci, tj. $F\in C^{(1)}(G)$, G-otevřená, $G\subset R^3$ a $(x_0,y_0,z_0)\in G$ a $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$:

Pak věta (o implicitní funkci) říká, že existuje funkce $z=z(x,y)\in C^1(U(x_0,y_0))$ a $z_0=z(x_0,y_0)$, která splňuje rovnici $F(x,y,z(x,y))=0$, tj. plocha, daná rovnicí $(*)$ je v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) grafem funkce $z=z(x,y)$, diferencovatelné v bodě (x_0,y_0), tj. existuje ke grafu fce z (tj. i k dané ploše) v bodě (x_0,y_0,z_0) tečná rovina, jejíž rovnice je

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

a vzorce pro $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)$ nám „dají" rovnici

$$z = z_0 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0),$$

což vynásobením rovnice $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$ dostaneme rovnici tečné roviny: $\underline{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$,

tj. $\underline{\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0}$,

neboli
$$\nabla F(X_0)(X-X_0)=0$$

<u>A ještě poznámka 1.</u>

Stejně jako u odvození rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě (x_0,y_0) této křivky stačilo, aby $\nabla F(x_0,y_0) \neq (0,0)$ (v případě, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, ale $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$ lze „modifikací" vět o implicitní funkci křivku v okolí bodu (x_0,y_0) uvažovat jako graf fce $x = x(y)$, $x(y_0)=x_0$), stačí i tady u plochy, dané rovnicí $F(x,y,z)=0$ pro tečnou rovinu v bodě (x_0,y_0,z_0) této plochy, aby $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$ (je-li např. $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$, opět, v okolí bodu (x_0,y_0,z_0) je plochu nutné uvažovat jako graf funkce $x = x(y,z)$, $x(y_0,z_0)=x_0$ a podobně i v situaci, kdy $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$)

<u>Příklad 3</u> – aplikace příkladu 2

Mějme kulovou plochu o rovnici $x^2+y^2+z^2-R^2=0$, $R>0$, a bod této plochy (x_0,y_0,z_0), tj. $x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2=0$.

Pak $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$

neboť počátek na dané ploše „neleží".

Tedy, tečná rovina ke kulové ploše v bodě (x_0,y_0,z_0) má rovnici

$$\underline{x_0 x + y_0 y + z \cdot z_0 = R^2}$$

neboť: $x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$

lze upravit $x_0 x + y_0 y + z_0 z = \underbrace{x_0^2+y_0^2+z_0^2}_{=R^2}$

a pozorování – $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 2(x_0,y_0,z_0)$ je tedy kolmý k tečné rovině v bodě kulové plochy!

a toto platí obecně: Je-li plocha dána rovnicí $F(x,y,z)=0$, $F(x_0,y_0,z_0)=0$ a F splňují předpoklady věty o implicitní funkci, tj. $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$, je $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ kolmý k příslušné tečné rovině ke ploše v bodě (x_0,y_0,z_0) plochy – a nazývá se **normálový vektor plochy v bodě (x_0,y_0,z_0)**

(užitečné např. při plošném integrálu – ve fyzice často užívaném)

Příklad 4 – „technický"

Je dána rovnice $z^3 - 3xyz - 1 = 0$ (*)

a $(x_0,y_0,z_0) = (0,2,1)$

Je danou rovnicí v okolí bodu $(0,2,1)$ definována implicitně funkce $z = z(x,y)$? – tak zní „úkol" příklad.

---

a odpověď: označme $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - 1$;

pak

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \\ 2) & F(0,2,1) = 1 - 0 - 1 = 0 \\ 3) & \frac{\partial F}{\partial z}(0,2,1) = 3z^2 - 3xy \Big|_{(0,2,1)} = 3 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ v okolí bodu $(0,2,1)$ rovnicí (*) je implicitně definována funkce $z = z(x,y)$, $z(0,2) = 1$ a funkce $z(x,y)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $(0,2)$)

(**) $$z^3(x,y) - 3xy\,z(x,y) - 1 = 0$$

Nechť je naším úkolem aproximovat lineárním „řešení" této rovnice, tj. funkci $z = z(x,y)$ v okolí bodu $(0,2)$, tj.

$$z(x,y) \cong z(0,2) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,2)\cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,2)(y-2)$$

Víme, že $z(0,2) = 1$, ještě je třeba spočítat parciální derivace. Věta dává vzorce pro výpočet derivací $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí bodu $(0,2)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{-3y\,z(x,y)}{3z^2(x,y) - 3xy} = +\frac{y\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))} = -\frac{-3x\,z(x,y)}{3z^2(x,y) - 3xy} = \frac{x\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a tedy pro $(x_0,y_0) = (0,2)$ dostaneme:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,2) = 2\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,2) = 0$$

a pak $z(x,y) \cong 1 + 2x$ v okolí bodu $(0,2)$

Ukážeme si ještě jinou cestu při výpočtu derivací implicitně definované funkce, a to derivováním rovnice **, kterou funkce $z(x,y)$ splňuje – zvláště při výpočtu derivací vyšších řádů je to cesta „lepší".

Funkce $z(x,y)$ splňuje rovnici (v okolí bodu $(0,2)$):

$$(**) \qquad z^3(x,y) - 3xy\,z(x,y) - 1 = 0$$

Derivujme $(**)$ „podle x“:

$$3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 3y\,z(x,y) - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

tj. $(***)$ $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(z^2(x,y) - xy\right) - y\cdot z(x,y) = 0$, tj. (stále)

$$(****) \qquad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a derivací $(**)$ „podle y“:

$$3z^2(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - 3x\,z(x,y) - 3xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

tj. $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(z^2(x,y) - xy\right) - x\,z(x,y) = 0$, a tedy (opět)

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,z(x,y)}{z^2(x,y) - xy}$$

a zkusme určit $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)$: $\quad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,2) = 2,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(0,2) = 0\right)$

derivujme $(***)$ podle y (je to jednodušší, než derivace zlomku, z vyjádření $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ $(****)$): dostaneme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(z^2(x,y) - xy\right) + \frac{\partial z}{\partial x}\left(2\cdot z(x,y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - x\right) - z(x,y) - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

a pro $(x_0,y_0) = (0,2)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2)\cdot 1 + 2\cdot(0-0) - 1 - 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,2) = 1$$

(a podobně lze určit i $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,2)$)

A ještě poznámka k „výpočtu" parciálních derivací funkce $y = y(x_1, \ldots x_n)$, „definované implicitně rovnicí" $F(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ v okolí bodu $(x_1^0,\ldots,x_n^0,y_0)$ (předpokládejme, že platí předpoklady věty o implicitní funkci):

Rovnice $\qquad F(x_1,\ldots x_n, y) = 0$

je obecně nelineární v y, ale při „výpočtu" parciálních derivací funkce $y(x_1,\ldots,x_n)$ dostaneme pro hledané parciální derivace $\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)$ rovnice lineární, a vždy je u $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ nenulový koeficient $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\ldots,x_n,y(x_1,\ldots,x_n)) \neq 0$ v okolí bodu $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. A totéž platí i pro „výpočet" parciálních derivací vyšších řádů (dle věty má funkce implicitně definovaná do rovnice derivace stejného řádu, jako „rovnice", a u derivace, kterou chceme určit derivováním dané rovnice, bude koeficient $\frac{\partial F}{\partial y}(x_1,\ldots,x_n,y(x_1,\ldots,x_n))$.

A druhé (a poslední) zobecnění na

systémy funkcí, definovaných implicitně soustavou obecně nelineárních rovnic

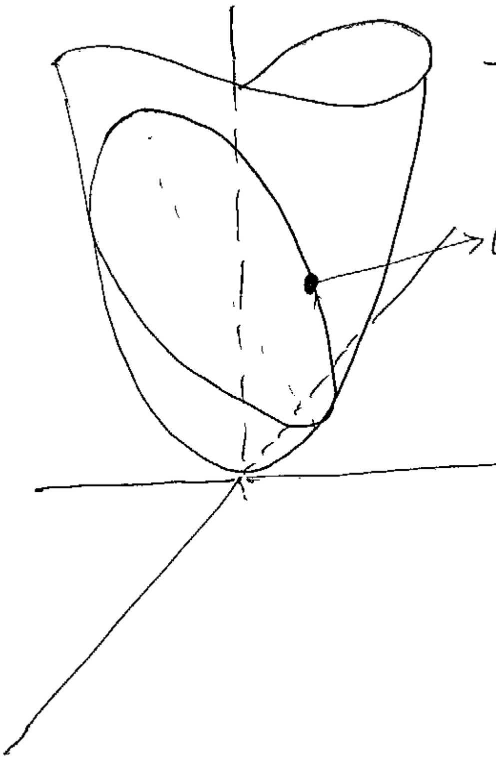
(nebude u zkoušky, ale je dobré se aspoň trochu s tímto problémem seznámit – neboť se „hodí" v aplikacích matematiky)

Začněme příkladem, pak budeme problém a jeho řešení formulovat obecně (s vysvětlením, ale bez důkazů, jako dříve)

Příklad: Je dána soustava dvou rovnic

$$(1)\quad (F_1(x,y,z) \equiv)\quad x+y+z-2=0 \quad \text{– rovina}$$

$$(2)\quad (F_2(x,y,z) \equiv)\quad x^2+y^2-z=0 \quad \text{– rotační paraboloid}$$



a bod $(x_0,y_0,z_0)=(-1,1,2)$ je řešením (1),(2) – – jak „vypadá" řešení soustavy v okolí bodu $(-1,1,2)$? Uvažujeme-li „geometricky", jedná se o průnik „rotačního paraboloidu a roviny – asi to bude „křivka", na které leží bod $(-1,1,2)$ – a půjde asi o to tuto křivku popsat „parametricky", tj. zda „půjde" při volbě „třeba „x" jako parametru popsat tuto křivku jako množinu bodů $(x, y(x), z(x))$, $x \in U(x_0)$ (zde $x_0=-1$);

tedy se objevuje otázka, tedy bude mít soustava rovnic (1),(2) (tj. soustava dvou rovnic pro tři neznámé) při volbě jedné neznámé (jako parametru) x jediné řešení $y(x), z(x)$ při zvoleném „$x \in U(x_0)$? Zkusme to:

(U „soustavy rovnic lineárních" radí „LA – rovnice by měly být „lineárně nezávislé")

Předpokládejme, že soustavou (1),(2) jsou (asi bude nějak implicitně) definovány funkce $y=y(x)$, $z=z(x)$ v okolí bodu $x_0=-1$ tak, že platí v $U(x_0)$

$$(1)\qquad x + y(x) + z(x) - 2 = 0$$

$$(2)\qquad x^2 + y^2(x) - z(x) = 0$$

a funkce $y(x), z(x)$ mají derivaci; pak derivováním (1),(2) dostaneme následující soustavu pro $y'(x)$ a $z'(x)$:

$$(1)'\qquad 1 + y'(x) + z'(x) = 0$$

$$(2)'\qquad 2x + 2y(x)y'(x) - z'(x) = 0$$

$$(\text{v } U(x_0))$$

Soustava $(1)', (2)'$ má pro zvolené $x \in U(x_0)$ právě jedno řešení, neboť determinant soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y(x) & -1 \end{vmatrix} \left(= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} (x, y(x), z(x)) \right) \neq 0$$

pro $x = x_0 \; (=-1)$; zde $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3$.

Tedy, determinant

$$(*)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) , & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) , & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

a to asi budeme potřebovat v obecné formulaci věty o systému funkcí implicitně definovaných soustavou dvou rovnic – – analogie $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ pro „řešení rovnice $F(x,y)=0$ (kde $F(x_0,y_0)=0$) v okolí bodu (x_0,y_0) ve tvaru $y=y(x)$"

Determinant $\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}, & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} (x_0, y_0, z_0)$ se nazývá Jacobián

(determinant Jacobiho matice zobrazení (F_1, F_2) vzhledem k proměnným y, z) a budeme tento determinant značit $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0)$.

<u>A zkusme formulovat definici a větu o „implicitních" funkcích pro tento případ:</u>

Mějme soustavu rovnic (*) $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ a bod (x_0, y_0, z_0)

takový, že platí $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $i = 1, 2$.

<u>Definice:</u> Soustavou (*) jsou v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definovány implicitně funkce $y = y(x)$, $z = z(x)$, když existují $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{U}(x_0, \delta)$ je $(y(x), z(x))$ jediné řešení soustavy (*) takové, že $(y(x), z(x)) \in \mathcal{U}((y_0, z_0), \varepsilon)$.

<u>Věta</u> Nechť
1) $F_1, F_2 \in C^{(k)}(G)$, $G \subset R^3$
2) $F_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $i = 1, 2$, $(x_0, y_0, z_0) \in G$
3) $\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Pak je soustavou (*) v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována dvojice funkcí $y(x), z(x)$, $y(x) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$ i $z(x) \in C^{(k)}(\mathcal{U}(x_0))$, tedy taková, že $F_i(x, y(x), z(x)) = 0$ v $\mathcal{U}(x_0)$, $i = 1, 2$

a $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

K dokončení příkladu –

ověření věty o implicitních funkcích:

(1) $F_1, F_2 \in C^{\infty}(R^3)$

(2) $F_i(-1,1,2) = 0$, $i=1,2$

(3) $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(-1,1,2) = -3$ (už jsme spočítali);

Tedy, soustavou $F_i(x,y,z)=0$, $i=1,2$ jsou v okolí bodu $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$ definovány implicitní funkce $y=y(x)$, $z=z(x)$, $y(-1)=1$, $z(-1)=2$; $y(x), z(x) \in C^{\infty}(U(-1))$ a nyní můžeme určit $y'(-1)$ a $z'(-1)$ (ze soustavy rovnic)

$$
\begin{aligned}
y'(x) + z'(x) &= -1 \\
2y(x)y'(x) - z'(x) &= -2x
\end{aligned}
$$

a řešení $\quad y'(x) = \dfrac{-2x-1}{2y+1}$, $\quad z'(x) = -y'(x) - 1 = \dfrac{2(x-y)}{2y+1}$

$\left(\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(x,y,z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & -1 \end{vmatrix} = -1-2y \neq 0 \right.$ ze spojitosti $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}$ v okolí bodu $(-1,1,2)$, poněvadž $\left. \dfrac{D(F_1,F_2)}{D(y,z)}(-1,1,2) = -3 \right)$

tedy, $y'(-1) = \frac{1}{3}$, $z'(-1) = -\frac{4}{3}$, a vektor $(1, y'(-1), z'(-1))$ je tečný vektor ke křivce, dané parametricky ve tvaru $(x, y(x), z(x))$ v bodě (x_0,y_0,z_0), tj. lze vyjádřit tečnu ke křivce v bodě $(x_0,y_0,z_0) = (-1,1,2)$:

$$
\begin{aligned}
x &= -1 + 3t \\
y &= 1 + t \quad , t \in R \\
z &= 2 - 4t
\end{aligned}
$$

(směrový vektor jsme vzali $3\left(1, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$)

A takto se formuluje definitivní zobecnění problému:

Mějme soustavu rovnic $(m, n \in N)$

$F_1(x_1,..x_n, y_1,..,y_m)=0$	stručně $X=(x_1,..,x_n)$, $Y=(y_1,..,y_m)$
$F_2(x_1,..x_n, y_1,..y_m)=0$	$F_1(X,Y)=0 \qquad X\in R^n, Y\in R^m$
$\cdots$	$F_2(X,Y)=0$
$F_m(x_1,..,x_n, y_1,..y_m)=0$	$\cdots$
	$F_m(X,Y)=0$

1) Nechť $F_i(x_1,..,x_n, y_1,..,y_m)$ jsou definovány v otevřené množině $G \subset R^{n+m}$, $i=1,2,..m$

2) $F_i(x_1^0,..,x_n^0, y_1^0,..,y_m^0)=0$, $i=1,2,..m$, $(x_1^0,..,x_n^0, y_1^0,..,y_m^0)\in G$

Definice: Soustavou (*) jsou v okolí bodu $(X_0, Y_0)\in G$ $(X_0=(x_1^0,..,x_n^0)$, $Y_0=(y_1^0,..,y_m^0))$ definovány implicitně funkce $y_i(X)$, $i=1,2,..,m$, pokud existují $\varepsilon>0$, $\delta>0$ tak, že pro každé $X\in U(X_0,\delta)$ je vektorová funkce $Y(X)=(y_1(X),..,y_m(X))$ jediné řešení soustavy (*) takové, že $Y(X)\in U(Y_0,\varepsilon)$.

Věta: (o systému „implicitních" funkcí): Nechť

1) $F_1,..,F_m \in C^{(1)}(G)$, $G\subset R^{n+m}$ otevřená;

2) $F_i(X_0,Y_0)=0$, $i=1,2,..m$, $(X_0,Y_0)\in G$

3) $\dfrac{D(F_1,..,F_m)}{D(y_1,..y_m)}(X_0,Y_0)\neq 0$.

Pak je soustavou (*) v okolí bodu $(X_0,Y_0)\in G$ definován implicitně systém funkcí $y_1(X),..y_m(X)$ tak, že
$F_i(X,Y(X))=0$ v $U(X_0)$, $i=1,..m$ a $Y(X_0)=Y_0$

a ještě dva příklady:

1. Transformace souřadnic – kartézské do „polárních":

$$\begin{cases} x - r\cos\varphi = 0 \\ y - r\sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{tj.} \quad \begin{array}{l} F_1(x,y,r,\varphi) = 0 \\ F_2(x,y,r,\varphi) = 0 \end{array}$$

v okolí bodu $(x_0, y_0, r_0, \varphi_0)$, $r_0 > 0$:

(i) $F_i(x,y,r,\varphi) \in C^\infty(\mathcal{U}(x_0,y_0,r_0,\varphi_0))$, $r_0 > 0$, $i = 1,2$

(ii) $F_i(x_0,y_0,r_0,\varphi_0) = 0$, $r_0 > 0$, $i = 1,2$

(iii) $$\left.\frac{D(F_1,F_2)}{D(r,\varphi)}\right|_{(x_0,y_0,r_0,\varphi_0)} = \begin{vmatrix} -\cos\varphi_0, & r_0\sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0, & -r_0\cos\varphi_0 \end{vmatrix} = r_0 \neq 0 \Rightarrow$$

volíme-li (x,y), $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, pak daná soustava zaručuje jednoznačné určení i $r = r(x,y)$ a $\varphi = \varphi(x,y)$

(tj. existuje inverzní zobrazení v okolí každého bodu $(x_0, y_0, r_0, \varphi_0)$, $r_0 \neq 0$), také mající parciální derivace (regulární zobrazení)

2. A "ledničkový" příklad:

Je dána soustava

$$(F_1(x,y,u,v) \equiv) \quad x + y - 2u^2 + v^2 = 0$$
$$(F_2(x,y,u,v) \equiv) \quad x - y - uv = 0$$

a $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$

Platí: 1) $F_i \in C^\infty(R^4)$, $i = 1,2$

2) $F_i(1,0,1,1) = 0$, $i = 1,2$

3) $$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}(1,0,1,1) = \begin{vmatrix} -4u & 2v \\ -v & -u \end{vmatrix}_{(1,0,1,1)} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$

(i pro (x,y,u,v) je $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = 4u^2 + 2v^2 \neq 0$ pro $(u,v) \neq (0,0)$)

Tedy, soustava má pro libovolné $(x,y) \in R^2$ jednoznačné dané řešení $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ v okolí bodu (x_0,y_0,u_0,v_0), $(u_0,v_0) \neq (0,0)$ a funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ jsou hladké.

(opět – existuje inverzní zobrazení k zobrazení

$$x = \frac{1}{2}(2u^2 - v^2 + uv)$$
$$y = \frac{1}{2}(2u^2 - v^2 - uv) \qquad (u,v) \neq (0,0) \;)$$